

文章编号: 2095-2163(2020)01-0123-05

中图分类号: TP311.13

文献标志码: A

# 大数据驱动下的刑事审判专家系统建模分析

司卫云<sup>1</sup>, 宋 燕<sup>1</sup>, 戴非凡<sup>1</sup>, 倪进平<sup>1</sup>, 杨桂松<sup>1</sup>, 李常青<sup>2</sup>

(1 上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093; 2 上海最闻信息科技有限公司, 上海 201210)

**摘要:** 本文基于近几年贵州高级人民法院“故意伤害罪”案由的多维度大样本数据,设计了一种融合 FCM 聚类、PCA 降维、基于 PSO 优化的 DNN、极限随机树等多种机器学习算法的司法智能专家审判系统。同时,比较了有无 PSO 算法优化的 DNN 模型在分类上的效果,并对比了不同模型的预测精度。通过理论与实验的结合分析发现,本文设计的模型在案件分类与刑期预测结果上表现出了较好的效果,能更科学有效地辅助司法机关在量刑过程中减少主观客观偏差,实现司法公平公正。

**关键词:** 故意伤害罪; 智能专家审判系统; 机器学习; PSO 算法; DNN 模型

## Modeling and analysis of criminal trial expert system driven by big data

SI Weiyun<sup>1</sup>, SONG Yan<sup>1</sup>, DAI Feifan<sup>1</sup>, NI Jinping<sup>1</sup>, YANG Guisong<sup>1</sup>, Li Changqing<sup>2</sup>

(1 School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 2 Shanghai News Information Technology Co., Ltd., Shanghai 201210, China)

**[Abstract]** Based on latest data of the “Intentional Injury Crime” cases with multi-dimension and large scale recorded in Guizhou Higher People’s Court, a judicial intelligent expert trial system is constructed in terms of several machine learning techniques such as FCM clustering, PCA dimensionality reduction, PSO-based DNN optimization and Extra-Trees. Meanwhile, DNN models with or without PSO show the different classification results as well as the prediction accuracy. Through the technical and experimental analysis, the model proposed in this paper has a better performance on trial classification and sentence prediction. Hence, such a model is helpful for judicial organs in reducing the prejudice during the process of sentencing so as to achieve justice and fairness.

**[Key words]** intentional injury crime; intelligent expert trial system; machine learning; PSO algorithm; DNN model

## 0 引言

机器学习是 AI 的一个重要分支,旨在使计算机在完全没有或有限的人类干预下,设计一系列“运算法则”,通过经验学习自动做出最优选择<sup>[1]</sup>。近年来,大数据和云计算等现代科技高速发展,为机器学习算法提供了丰富的训练样本<sup>[2]</sup>,人工智能技术呈现出加速发展的态势,已经在人类生产、生活及社会管理的众多领域存在并发挥作用<sup>[3]</sup>。

司法领域,卷宗资料数量众多、信息繁杂,面对庞大复杂的证据链,在短时间内完成人工数据筛选和分析十分困难。并且司法工作专业性较强,审判尺度难以拿捏,这将直接关系到司法工作的后续顺利开展。为了解决上述问题,国内外各大法律机构拟将人工智能引入司法领域,构建基于大数据的智能专家审判系统以代替常规的基于规则的专家审判系统,力争在辅助法官办案、服务律师和社会公众等

方面有所突破<sup>[4]</sup>。此外,运用计算机对海量多源的司法数据进行高速处理,并结合国家发展战略、政策法规和社会大众生活情况,对相关案件变化动态及发展趋势进行深度关联分析,能为司法部门严谨治法提供合理评估<sup>[5]</sup>。

尽管人工智能的作用显而易见,然后在司法领域机器学习尚处于起步阶段,主要存在以下问题:从数据层面上看,目前的法律数据存在不充分、数据量大、不客观且结构化不足的缺点;从算法层面上看,算法单一、隐秘且低效,缺乏系统性的智能审判专家模型;从人才层面上看,缺乏法律界和人工智能等多学科交叉性的复合型人才<sup>[6]</sup>。因此,如何高效合理地利用人工智能算法优化工作流程,建立智能判案模型,辅助法官提升工作效率,加快结案时间成为了亟待解决的问题。

综上所述,本文基于贵州高级人民法院提供的

**基金项目:** 上海市自然科学基金(18ZR1427100)。

**作者简介:** 司卫云(1989-),女,硕士研究生,主要研究方向:机器学习算法、大数据模型应用研究;宋 燕(1979-),女,副教授,博士生导师,主要研究方向:大数据分析、图像处理、模型预测控制等;戴非凡(1994-),女,硕士研究生,主要研究方向:机器学习算法、大数据模型应用研究;倪进平(1994-),男,硕士研究生,主要研究方向:机器学习算法、大数据模型应用研究;杨桂松(1982-),男,副教授,主要研究方向:大数据分析、物联网和机会通信等;李常青(1977-),男,上海最闻信息科技有限公司董事长。

**通讯作者:** 宋 燕 Email:sonya\_usst@163.com

**收稿日期:** 2019-10-10

2016年1月至2017年5月“故意伤害罪”卷宗,设计了一种融合多种机器学习算法的故意伤害罪案件智能判案模型。基于建立的专家模型,对故意伤害罪案件判罚刑期进行有效预测,既提高办案效率,又能减少同案裁量的差异性,以实现执法的公证性。

## 1 模糊C均值聚类

模糊C均值算法通过把 $m$ 个样本分成 $c$ 个类别,求出每个类的聚类中心,并最小化目标函数实现聚类。其目标函数的表达式为:

$$\phi(U, c_1, \dots, c_c) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^m u_{ij}^n (d_{ij})^2, \quad (1)$$

其中,  $d_{ij} = \|c_i - x_j\|$ , 为第 $j$ 个序列到 $i$ 类中心的欧几里得距离;  $u_{ij}$  表示第 $j$ 个样本属于第 $i$ 个类的隶属度,且满足  $u_{ij} \in (0, 1)$ ,  $\sum_{i=1}^c u_{ij} = 1$ ,  $n$  是隶属度因子。令  $c_i$  表示第 $i$ 类的聚类中心,关于样本点  $x$  的模糊C均值聚类就是使目标函数(1)在满足上述条件下达到最小值<sup>[7]</sup>。

考虑到上述约束条件,由拉格朗日乘法可构造新的目标函数如下<sup>[8]</sup>:

$$\bar{\phi}(U, c_1, \dots, c_c, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \phi(U, c_1, \dots, c_c) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (\sum_{i=1}^c u_{ij} - 1), \quad (2)$$

对式(2)两边同时求导,可得  $\bar{\phi}(U, c_1, \dots, c_c, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  取最小值的必要条件为:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left( \frac{\|x_j - c_i\|}{\|c_k - x_j\|} \right)^{\frac{2}{n-1}}}, \quad (3)$$

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j u_{ij}^n)}{\sum_{j=1}^m u_{ij}^n}. \quad (4)$$

FCM 通过不断迭代来更新式(3)、(4),研究得到该过程的设计表述如下:

- (1) 确定聚类个数  $c$ , 隶属度因子  $n$ , 随机初始化的隶属度矩阵  $U$ , 最大迭代次数  $I = 100$ ;
- (2) 通过式(3)求解新的隶属度矩阵;
- (3) 通过式(4)求解新的聚类中心;
- (4) 直到满足最大迭代次数,算法停止,否则就转向式(2)。根据最后一次迭代的隶属度矩阵,若  $u_{ij} = \max\{u_{ij}\}$ , 则  $x_j$  属于第  $i$  类。

## 2 基于 PSO 的 DNN 故意伤害罪分类模型

DNN 能提取更复杂和抽象的高维特征,并在大量的数据中获得输入空间的有效表征。相比手动提取特征或专家设计规则的方法,DNN 具有高效和高精度的优势。但确定 DNN 的网络结构参数是本文

构建高精度 DNN 分类器的困难之一。针对以上问题,本文设计了基于 PSO 的 DNN 故意伤害罪分类模型,通过 PSO 优化算法确定 DNN 网络结构参数,并在优化过程中实现 DNN 的训练,以便在保证模型精度的同时,更科学地确定网络结构。

### 2.1 粒子群优化算法研究

粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)是一种基于迭代的进化计算算法<sup>[9]</sup>。算法中,首先要随机初始化种群粒子,此时的粒子信息可以用位置  $X_i$  和速度  $V_i$  来表示。每经过一次进化,粒子便通过跟踪粒子的个体极值( $pbest$ )和种群的全局极值( $gbest$ )来更新粒子的速度和位置<sup>[10]</sup>。 $pbest$  和  $gbest$  是根据适应度函数找到的最优解。找出这2个最优解后,粒子根据以下公式来更新自己的速度和位置,即:

$$v_{ij}(t+1) = w * v_{ij}(t) + c_1 r_1 * [pbest_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_2 * [gbest_{ij}(t) - x_{ij}(t)], \quad (5)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t), \quad (6)$$

其中,  $w$  为惯性权重;  $v_{ij}(t)$  是粒子  $i$  在第  $t$  次迭代中第  $j$  维的速度;  $x_{ij}(t)$  是粒子  $i$  在当前时刻的位置;  $r_1, r_2$  是  $(0, 1)$  之间的随机数,用来模拟自然界中的一些微小扰动;  $c_1, c_2$  是学习因子,分别表示粒子对自身记忆的依赖程度和其他粒子对其施加的影响<sup>[11]</sup>。1999年,SHI等人<sup>[12]</sup>提出了惯性权重线性调整策略,也称标准 PSO。 $w$  的线性递减迭代公式如下:

$$w(t) = w_{\min} + (w_{\max} - w_{\min}) \frac{(t_{\max} - t)}{t_{\max}}. \quad (7)$$

其中,  $t_{\max}$  是迭代的最大次数;  $t$  是当前迭代次数;  $w_{\max}$  为最大权重,建议取值 0.9;  $w_{\min}$  为最小权重,建议取值 0.4。当  $w$  较大时,全局搜寻能力较强;当  $w$  较小时,局部搜寻能力较强。因此,针对不同的搜寻问题,依赖  $w$  的动态变化,可以相应调整全局和局部搜寻能力,使得 PSO 算法的性能有了极大的提升,并成功应用于很多实际优化问题。

### 2.2 利用 PSO 优化 DNN 模型算法步骤

本文提出基于 PSO 的 DNN 故意伤害罪分类模型,即通过 PSO 优化算法确定神经网络结构参数。算法的整体设计流程详述如下。

#### 算法1 PSO 优化算法

输入: 训练集  $Z = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_z, y_z)\}$

输出: 最优神经网络结构参数

Step 1 设置需要优化的变量,如神经网络层

数、每层神经元个数、激活函数类型;

**Step 2** 设置 PSO 算法参数:学习因子、最大进化次数、惯性权值等;

**Step 3** 初始化粒子群,确定粒子群规模,确保每个粒子的位置向量和速度向量的维度;

**Step 4** 基于六折交叉验证法将训练集划分为 DNN 训练过程中的训练集和测试集,将每个测试集预测精度的平均值作为本次粒子规模下 DNN 分类模型的预测精度;

**Step 5** 计算各粒子的适应度,使用 Step 4 中预测精度的倒数作为 PSO 的适应值用作粒子空间位置优劣的度量,适应值越小,表明粒子位置越好;

**Step 6** 寻找  $p_{best}$  与  $g_{best}$ ;

**Step 7** 根据速度更新公式(5)和位置更新公式(6)分别更新粒子的速度和位置,得到新的随机解;

**Step 8** 当迭代次数大于最大迭代次数时,算法停止,得到最优解。否则,返回 Step 4 继续搜寻最优解;

**Step 9** 将优化得到的最优神经元层数、每层神经元个数及激活函数这些超参数作为神经网络的结构参数,然后根据实际输出值与期望输出的误差进行反向传播训练神经网络,不断调整网络权值和阈值,直到满足迭代条件。

为证明本文提出的基于 PSO 算法优化 DNN 模型参数得到的分类器的确在性能上优于普通 DNN 分类器,本文将在 4.3 节中,对有无 PSO 优化的 DNN 模型分类结果进行比较。

### 3 基于 ET 的故意伤害罪刑期预测算法

极限随机树(Extra-Trees, ET)也称极端树<sup>[13]</sup>,与标准的基于树的方法相比,其强大的随机性使得该方法在减少切分点方差的力度上更强,同时,在精度和泛化性能上也遥遥领先于其他集成方法。在后续的 4.3 节中,分别运用随机森林、前向逐步线性回归和 ET 三种算法对刑期进行预测及对比。在极限随机树的构建过程中,主要需确定 3 个参数。首先,确定最终极限随机树包含的决策树数目  $N$ ,即这  $N$  棵回归树的预测结果的普通算数平均数作为回归模型最终的预测结果;其次,在每棵决策树的每个节点随机选择当前节点属性集中的属性个数  $k$ ;最后,分裂一个节点所需的最小样本大小  $n_{\min}$ 。以贵州法院故意伤害罪案件为训练样本,对该样本及其要素集分别定义为:

$$Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}, P =$$

$$\{p_1, p_2, \dots, p_z\}$$

其中,  $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$  表示第  $i$  个案件对应各要素(属性)的取值,  $y_i$  表示案件的真实判罚刑期。

基于 ET 的故意伤害罪量刑预测算法详见如下。

#### 算法 2 *Build\_Extra\_Trees\_ensemble(Q)*

输入: 训练样本  $Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$

输出: 极限随机树  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$

**Step 1** for  $i = 1$  to  $N$  do

**Step 2** 生成一棵极限随机树  $t_i = \text{Build\_an\_Extra\_Tree}(Q)$ ;

**Step 3** 返回极限随机树  $T$ 。

#### 算法 3 *Build\_an\_Extra\_Tree(Q)*

输入: 训练样本  $Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$

输出: 一棵极限随机树  $t$

**Step 1** if  $\text{Stop\_split}(Q) = \text{True}$

**Step 2** 返回一个叶节点;

**Step 3** else

**Step 4** 从当前节点属性集中随机选择  $k$  个属性  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ ;

**Step 5** 得到  $k$  个切分点  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ , 其中  $s_i = \text{Choose\_a\_random\_split}(Q, p_i)$ ;

**Step 6** 依据  $\text{Score}(s_*, Q) = \max_{i=1, \dots, k} \text{Score}(s_i, Q)$ , 选择最优切分点  $s_*$ ;

**Step 7** 依据切分变量  $p_*$  和切分点  $s_*$ , 将训练样本分为 2 个子集  $Q_l$  和  $Q_r$ ;

**Step 8** 利用样本子集  $Q_l$  和  $Q_r$  分别构建左子树和右子树:  $t_l$  和  $t_r$ , 即:

$$t_l = \text{Build\_an\_Extra\_Tree}(Q_l)$$

$$t_r = \text{Build\_an\_Extra\_Tree}(Q_r);$$

**Step 9** 返回一棵极限随机树  $t$ 。

#### 算法 4 *Stop\_split(Q)*

输入: 训练样本  $Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$

输出: 布尔值(True/False)

**Step 1** if  $|Q| < n_{\min}$

**Step 2** 返回 True;

**Step 3** else if

**Step 4**  $Q$  中的所有样本在所有属性上取值相同;

**Step 5** 返回 True;

**Step 6** else if



**Step 7**  $Q$  中所有样本的输出结果相同;

**Step 8** 返回 True;

**Step 9** else

**Step 10** 返回 False。

**算法 5** *Choose\_a\_random\_split(Q,P)*

输入: 训练样本  $Q = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$ , 属性  $p$

输出: 切分点

**Step 1** 令  $p_{\max}^D$  和  $p_{\min}^D$  分别表示训练样本中属性为  $p$  的最大值和最小值;

**Step 2** 从  $[p_{\min}^D, p_{\max}^D]$  中随机选择一个切分点  $p_c$ ;

**Step 3** 返回切分点  $[p < p_c]$ 。

## 4 实验结果与分析

本文数据由贵州法院整理并提供,故意伤害罪案件时间跨度为2016年1月~2017年5月,刑期跨度为0~240个月,案件总数量为5000多件。

### 4.1 模糊C均值聚类结果与分析

由于案件数量较多,刑期横跨0~240个月且分布不均匀。因此,本文采用FCM聚类算法基于案件刑期进行聚类分析。为确定最优类别数,本文分别进行了4类、5类、6类的聚类实验,通过观测聚类有效性评价指标得到结果为5的聚类效果最佳。每类偏差分别为:0.09,0.22,0.7,0.88,0.72个月。

表1 基于PSO的DNN故意伤害罪分类模型参数设置

Tab. 1 PSO-based DNN intentional injury crime classification model parameter setting

PSO优化DNN参数	搜索空间	PSO超参数	参数设置
激活函数	[Relu, Sigmoid]	粒子数	300
最小隐藏层层数	0	最大迭代次数	300
最大隐藏层层数	5	粒子最大速度	1.0/2.0 × ln2
最小神经元个数	1	学习因子 $c_1$	0.5 + ln2
最大神经元个数	64	学习因子 $c_2$	0.5 + ln2
—	—	最小惯性权重 $w_{\min}$	0.4
—	—	最大惯性权重 $w_{\max}$	0.9

为表明本文提出的运用PSO算法求解DNN网络模型参数的可靠性,本文做了对比实验,得到的结果见表2。

表2 实验结果对比表

Tab. 2 Comparison of experimental results

算法	最优网络隐层结构	迭代次数	激活函数	精度/%
DNN	[10, 25, 30, 25]	3 200	Relu	80.02
PSO+DNN	[22, 52, 61, 63, 62]	2 500	Relu	<b>81.59</b>

本文将PSO优化后得到的最优网络参数作为本文拟构建的DNN分类器结构,通过将600次迭代

## 4.2 分类器模型评价与分析

由于贵州法院提供的故意伤害罪原始数据并不包括案件的类别划分,因此本文将4.1节FCM得到的聚类结果作为构建分类器模型的数据集真实类别标签。

故意伤害罪数据集含有不重复要素共75个,若直接将这些数据用于后续模型的建立,将造成巨大的时间开销和计算复杂度。为了解决这一问题,本文使用主成分分析模型(Principal Component Analysis, PCA)<sup>[14]</sup>,通过提取所有故意伤害罪案件要素的主要成分,从而在保证精度的同时,降低特征维度并提高模型构建效率。

在PSO优化过程中涉及到DNN模型的训练,即在每一时刻都需要获得当前粒子所处位置训练得到的DNN分类器的分类质量,也就是准确度,这是通过对训练模型的评估来完成的。为了体现分类器的泛化性能,本文利用K折交叉验证技术(本文取 $K=6$ ),将训练集划分为K组子样本,一组用于训练过程的验证,其余子样本用于计算梯度更新权重实现模型训练。每一次更新都会获得K个结果,然后对获得的测试精度求取平均作为本次模型精度。

本文利用PSO算法优化DNN网络模型参数的具体搜索空间与PSO求解器的超参数设置见表1。

后得到的权重作为DNN分类模型的初始权重,在此基础上继续对分类器做训练,经过1900次迭代后得到的基于故意伤害罪数据的模型分类精度为**81.59%**。以上实验充分证明基于PSO算法优化得到的DNN故意伤害罪分类模型不仅具有较科学的网络设计依据,同时模型精度也有所提升。

## 4.3 预测模型评价与分析

在预测模型训练前,将依据4.2节中分类模型得到的各类别标签将数据集划分为5组。本文针对5组数据集,分别构建预测模型。研究将每组子样

本集随机划分为75%训练集和25%测试集。

对于极限随机树,本文设定决策树的数量参数为 $N = 300$ ,在每棵决策树的每个节点随机选择当前节点属性集 $d$ 中的属性个数为 $k = \log_2^d$ ,分裂一个节点所需的最小样本大小数为 $n_{\min} = 2$ 。研究中通过扩展节点直到所有叶子包含样本数少于或等于 $n_{\min}$ 后停止。另外,随机森林算法中,设置决策树数量参数为300;前向逐步线性回归模型中,设置学习率为0.05,迭代次数为8 000次。

在该实验阶段,本文运用随机森林、前向逐步线性回归和ET三种算法进行刑期预测,并通过计算平均绝对误差作为每组案件的平均偏差来评价模型优劣,具体表达式为:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{y}_i - y_i|. \quad (8)$$

其中, $N$ 为该组样本个数; $y_i$ 为各案件真实刑期; $\hat{y}_i$ 为各案件的预测刑期。实验结果对比见表3。通过平均偏差对比可知,ET算法更适用于本文的故意伤害罪刑期预测任务。

表3 回归结果对比表

Tab. 3 Comparison of regression results

	平均偏差/月		
	极限随机树	随机森林	前向逐步线性回归
第一组(253)	8.17	9.51	12.55
第二组(254)	7.79	10.94	17.26
第三组(233)	5.03	6.09	9.22
第四组(1 281)	4.45	4.77	6.67
第五组(3 327)	3.69	3.85	4.42

## 5 结束语

本文提出了一种融合FCM算法、基于PSO优化的DNN分类算法、极限随机树等多种机器学习算法的智能专家审判系统。其中,基于PSO优化的DNN分类模型较DNN模型本身有更高的分类精

度;同时,极限随机树也比常用的回归方法有更精确的预测结果和更好的泛化性能。通过贵州法院故意伤害罪数据的实验验证表明,该专家审判系统可为司法工作提供更科学的指导,在保证审判公正性的同时,极大地减少了判案时间和工作量。本文旨在挖掘犯罪要素与刑期的隐含关系,为司法领域的研究和应用提供了一种全新的思路。在接下来的工作中,通过改进审判系统中的分类算法,以此获得更高的分类精度,进而提高预测模型的性能,使得预测更为精确。此外,也可尝试对其他类型的法律案件数据进行挖掘分析,在进一步的模型优化后实现审判系统的普适性。

## 参考文献

- [1] 刘镇. 人工智能和机器学习在金融领域的发展及对金融稳定的影响[J]. 吉林金融研究, 2018(2): 36-38.
- [2] 李成. 基于流形的主动学习算法[D]. 杭州: 浙江大学, 2014.
- [3] 裘凯斌. 人工智能在司法领域的运用现状及前景展望[J]. 开封教育学院学报, 2018, 38(4): 243-244.
- [4] 伍红梅. 以“大数据+机器学习”为驱动 构建刑事案件判案智能预测系统[J]. 人民司法(应用), 2018(10): 34-40.
- [5] 佚名. 大数据+法律: 更高效率、更多正义[J]. 人民法治, 2018(2): 14-15.
- [6] 左卫民. 关于法律人工智能在中国运用前景的若干思考[J]. 清华法学, 2018, 12(2): 108-124.
- [7] 李凡. 模糊C聚类综合评价法在企业财务信用评级中的应用[J]. 中国管理信息化, 2011, 14(4): 32-33.
- [8] 秦国华. 工业企业经济效益分析—以江苏省为例[J]. 当代会计, 2017(5): 78-79.
- [9] 庞巍. 进化计算算法在路径优化问题应用的研究[D]. 长春: 吉林大学, 2004.
- [10] 杨雪榕, 梁加红, 陈凌, 等. 多邻域改进粒子群算法[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(11): 2453-2458.
- [11] 叶倩, 楼旭阳. 基于邻域信息优化算法的混沌系统参数估计方法: 中国, CN103218459A[P]. 2013-07-24.
- [12] 左旭坤, 苏守宝. 粒距反馈的S函数粒子群权值调整策略[J]. 计算机应用, 2012, 32(10): 2724-2727.
- [13] GEURTS P, ERNST D, WEHENKEL L. Extremely randomized trees[J]. Machine Learning, 2006, 63(1): 3-42.
- [14] PEARSON K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space[J]. Philosophical Magazine, 1991, 2: 559-572.