文章编号：2095-2163(2022)07-0118-05　　中图分类号：TP273　　文献标志码：A

连续双切换线性正系统状态反馈控制

冉晓宇[1]，龙　飞[2]

（1 贵州大学 大数据与信息工程学院，贵阳 550025；2 贵州理工学院 人工智能与电气工程学院，贵阳 550003）

摘　要：本文研究了连续双切换线性正系统的状态反馈控制问题。通过构造多 Lyapunov 函数，利用线性矩阵不等式技术，以及马尔科夫过程暂态分析方法，提出系统在零干扰的情况下，满足平均驻留时间切换规则限制的指数几乎处处稳定的充分条件，同时得到满足系统稳定性的确定性切换律和状态反馈控制器。通过数值仿真验证，证明了推导出的条件的有效性。

关键词：双切换系统；反馈控制；平均驻留时间；指数几乎处处稳定

State feedback control of continuous dual-switched linear positive systems

RAN Xiaoyu[1], LONG Fei[2]

(1 College of Big Data and Information Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China;
2 College of Artificial Intelligence and Electrical Engineering, Guizhou Institute of Technology, Guiyang 550003, China)

【**Abstract**】The feedback control problem of a class of continuous dual-switching linear positive systems is studied in this paper. By constructing multiple Lyapunov functions, using the linear matrix inequality technique and the Markov process transient analysis method, a sufficient condition is proposed on the condition that the system satisfies the exponential almost-sure stability under the limit of the average residence time switching rule in the case of zero disturbance. At the same time, we get the deterministic switching law and state feedback controller which satisfies the system stability. The validity of the deduced conditions is verified by numerical simulation.

【**Key words**】dual-switched system; feedback control; average dwell time; exponential almost-sure stability

0　引　言

双切换线性正系统是由一组线性子系统组成，在其子系统间切换，受控于一个有限状态的马尔可夫过程。此类系统被广泛应用于结构或参数方面存在突然随机变化的系统进行建模，模型可应用于网络控制系统、HIV 突变和治疗[1-2]。

在过去的几十年里，切换系统的稳定性分析一直都是一个重要的研究课题。由于电子信息工程、通信、经济学等领域中愈加复杂的控制对象，研究者越来越关注切换系统的稳定性和其控制器综合问题，切换系统的应用引起了更为广泛的关注。对于切换系统稳定性的分析，常用的分析方法有 Lyapunov 函数、Co-positive Lyapunov 函数、驻留时间和平均驻留时间等。本研究中，选择多 Lyapunov 函数方法，研究双切换线性正系统，并对其有效性进行了验证。

当前的许多稳定性研究中，均假设切换系统的每个子系统都是稳定的，但在任意切换规则下的切换系统却都不能保持稳定，仅在有限的切换信号下可能是稳定的。尽管存在一些线性分析方法和工具，对于切换系统的稳定性和控制综合问题仍是一个具有挑战性的研究方向。平均驻留时间切换是一类有限的切换信号方式，切换的次数被限制在一个有限的间隔内，且平均时间不小于一个给定常数。

对于双切换线性系统，文献[3-4]基于持续驻留时间(Persistent dwell-time, PDT)的方法，研究了系统的鲁棒指数几乎处处稳定；又基于驻留时间(DT)的方法设计确定性切换，分析了系统几乎处处稳定。文献[5]用反馈切换律设计确定性切换律，分析了系统在均方稳定下的状态反馈控制器问题。文献[6]设计切换规则和使用输出反馈控制器，保证闭环系统的鲁棒渐近稳定，给出在鲁棒性能要求下可行存在的充分性判据。文献[7]针对具有平均驻留时间的切换线性控制系统，提出了一种降阶输出反馈控制方法。该方法将边界条件加入到综合控制问题中，利用多重二次 Lyapunov 函数，在统一的

基金项目：国家自然科学基金(61813006)；贵州省基础研究计划重点基金资助项目(20191416)。

作者简介：冉晓宇(1997-)，女，硕士研究生，主要研究方向：复杂系统分析与控制；龙　飞(1973-)，男，博士，教授，博士生导师，主要研究方向：复杂系统的建模分析与控制优化、混杂系统的鲁棒性、奇异混杂系统的神经网络控制研究。

通讯作者：龙　飞　　Email：feilong@git.edu.cn

收稿日期：2022-03-03

框架下，建立了具有保证稳定性的降阶输出反馈控制器，并将综合条件表述为一组具有给定的驻留时间参数的 LMIs，为具有 ADT 切换的离散时间线性控制系统的综合提供了一种有效的、系统的方法。

本文将多 Lyapunov 函数、线性矩阵不等式方法与反馈控制器设计方法相结合，在平均驻留时间的方法下，得到控制器和子系统的切换规则，以保证切换系统在状态反馈控制器下的指数几乎处处稳定。

1　问题描述

考虑下面的连续双切换线性正系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}x(t)+B_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}u(t)\\ z(t)=C_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}x(t)+D_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}u(t)\end{cases}\tag{1}$$

其中，$x(t)\in R^n\geqslant 0$ 是系统的状态向量；$u(t)\in R^n$ 是系统的控制输入；$z(t)\in R^n$ 是系统的性能输出；确定性切换信号 $\gamma(t)$ 是右连续的分段常数函数，其取值于有限集 $\bar{M}=\{1,2,\cdots,M\}$；$\sigma(t,j)$ 表示受控于 N 模马尔可夫链的指定子系统索引值的随机切换信号，且每个马尔可夫过程共有 N 个模态；转移概率矩阵为 $\boldsymbol{\Lambda}^{(j)}=(\lambda_{ab}^{[j]})_{N\times N}$，其中 $\lambda_{ab}^{[j]}:=\{\sigma(t+1,j)=b\mid\sigma(t,j)=a\}$，且 $\sum\limits_{b=1}^{N}\lambda_{ab}^{[j]}=1,\lambda_{ab}^{[j]}\geqslant 0$。假设马尔科夫链 $\sigma(t,j)$ 是不可约的，则马尔科夫链会有唯一且满足于 $\Pi^{[j]}=\Pi^{[j]}Q^{[j]}$ 的平稳分布，$\Pi^{[j]}=[\pi_1^{[j]},\pi_2^{[j]},\cdots\pi_N^{[j]}]$，且 $\sum\limits_{a=1}^{N}\pi_a^{[j]}=1$。其中 $A_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}$，$B_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0,C_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0$ 和 $D_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0$ 是已知的常数矩阵。

选择设计如下形式的状态反馈控制器 $u(t)=K_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}x(t)$，通过选择合适的切换律，使得系统(1)可以满足几乎处处稳定的性能要求。

定义 1[8]　如果对于任意初始条件 $x(t_0)\geqslant 0$，对于任意的 $t>0$，都有 $x(t)\geqslant 0,z(t)\geqslant 0$，则系统(1)是正系统。

引理 1[8]　如果系统(1)是正系统，则 $A_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0,B_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0,C_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0$ 和 $D_{\sigma(t,\gamma(t))}^{[\gamma(t)]}>0$。

定义 2[9]　对于任意给定的时刻 $t_0\leqslant t\leqslant T$，$N_i^{[j]}(t,T)$ 为切换信号 σ 在时间间隔 $[t,T)$ 内的切换次数。如果对于 $\tau^*>0,N_0>0$ 满足 $N_i^{[j]}(t,T)\leqslant N_0+\dfrac{(T-t)}{\tau^*}$，则 $\tau^*>0$ 被称为切换信号 σ 的平均驻留时间，N_0 称为切换信号 σ 的抖振界。

引理 2[10]　如果对称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可以进行如下分块：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & S\\ S^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 为对称矩阵，那么当且仅当下面条件之一成立时，M 为负定矩阵。条件表达式如下：

(1) $\boldsymbol{X}<0,\boldsymbol{Z}-S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}S<0$

(2) $\boldsymbol{Z}<0,\boldsymbol{X}-S\boldsymbol{Z}^{-1}S^{\mathrm{T}}<0$

注意：以上结果完全适用于 $\boldsymbol{M}$ 为正定矩阵的情形，只需把条件(1)、(2)中的“<”用“>”代替即可。在一些控制问题中，经常出现如下形式的不等式：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}<0$$

其中：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}>0;\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$ 是已知相应维数的常数矩阵；$\boldsymbol{P}$ 为对称矩阵。

应用引理 2，可将矩阵不等式的可行性问题转化为一个等价的矩阵不等式的可行性问题：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{PB}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{R}\end{bmatrix}<0$$

上式是一个关于矩阵变量 $\boldsymbol{P}$ 的线性矩阵不等式。

定义 3[11]　如果所有 $x\in R^n$，满足：

$$P\{\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log\|x(t,x_0)\|<0\}=1$$

则切换系统的连续平衡点 $x=0$，是指数几乎处处稳定的。

引理 3[12]　对于任意 $j\in\bar{M}$，考虑一个在区间 $[0,t)$ 上具有 N 个模的马尔科夫过程，有以下两式成立：

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{T_i^{[j]}(0,t)}{t}=\pi_i^{[j]}\right\}=1$$

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{N_i^{[j]}(0,t)}{t}=\pi_i^{[j]}\,|q_{ii}^{[j]}|\right\}=1$$

其中，$T_i^{[j]}(0,t)$ 表示 $[0,t)$ 内子系统的总驻留时间，$N_i^{[j]}(0,t)$ 表示子系统在此区间的总激活次数。

2　主要结果

定理 1　考虑如上切换系统，给定参数 $\lambda_i^{[j]}>0,\mu_i^{[j]}>1$，如果存在一组正定矩阵 $\boldsymbol{S}_i^{[j]}$ 和一组普通矩阵 $\boldsymbol{R}_i^{[j]}$，使得 $\forall i,r\in\bar{N},j\in\bar{M},j\neq i$，满足：

$$\begin{bmatrix}(A_i^{[j]}\boldsymbol{S}_i^{[j]}+B_i^{[j]}\boldsymbol{R}_i^{[j]})^{\mathrm{T}}+A_i^{[j]}\boldsymbol{S}_i^{[j]}+B_i^{[j]}\boldsymbol{R}_i^{[j]}+\lambda_i\boldsymbol{S}_i^{[j]} & (C_i^{[j]}S_i^{[j]}+D_i^{[j]}\boldsymbol{R}_i^{[j]})^{\mathrm{T}}\\ * & -I\end{bmatrix}<0,\tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} S_i^{[j]} & S_r^{[j]} \\ * & \mu_i^{[j]} \end{bmatrix} > 0 \tag{3}$$

则连续双切换线性正系统(1)的切换反馈控制问题是可解的,其平均驻留时间满足:

$$\tau^* \geqslant \frac{\ln\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} \tag{4}$$

$\bar{\mu} = \max\limits_{i\in \bar{N}, j\in \bar{M}} \mu_i^{[j]}, \bar{\lambda} = \max\limits_{i\in \bar{N}, j\in \bar{M}} \lambda_i^{[j]}$,状态反馈增益矩阵为 $K_i^{[j]} = R_i^{[j]}[S_i^{[j]}]^{-1}$。

证明 选择如下形式的多 Lyapunov 函数:

$$V_i^{[j]}(x) = x^{\mathrm{T}} P_i^{[j]} x \tag{5}$$

假定 $\gamma(t) = \gamma_k \in \bar{M}$ 对于 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 和 $\gamma(t_{k+1}) \neq \gamma_k$,并且在 $[t_k, t_{k+1})$ 之间没有确定性切换,$t_k = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_l < \tau_{l+1} \leqslant t_{k+1}$ 是马尔科夫切换信号 $\sigma(t, \gamma_k)$ 在间隔 $[t_k, t_{k+1})$ 的切换时间序列,即 $\sigma(t, \gamma_k) = \sigma_v^{\gamma_k} \in \bar{N}$。对于任意的 $t \in [\tau_v, \tau_{v+1}) \subset [t_k, t_{k+1})$,且 τ_v 是第 v 次切换时间瞬间,其中 $v \in \{0,1,2,\cdots,l\}$,$l < \infty$,且 $\tau_{l+1} := t_{k+1}$,从 M 个子系统中随机选择一个激活的马尔可夫子系统。对于任意 $t \in [\tau_l, t_{k+1})$,求解 $V_i^{[j]}(x)$ 关于时间的导数,可得:

$$\dot{V}_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t) = x^{\mathrm{T}}(t)[(A_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + B_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})^{\mathrm{T}} P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(A_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + B_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})]x(t)$$

根据式(2),应用引理 2,

$$(A_i^{[j]} S_i^{[j]} + B_i^{[j]} R_i^{[j]})^{\mathrm{T}} + A_i^{[j]} S_i^{[j]} + B_i^{[j]} R_i^{[j]} + \lambda_i S_i^{[j]} + (C_i^{[j]} S_i^{[j]} + D_i^{[j]} R_i^{[j]})^{\mathrm{T}} (C_i^{[j]} S_i^{[j]} + D_i^{[j]} R_i^{[j]}) < 0$$

令 $P_i^{[j]} = [S_i^{[j]}]^{-1}, K_i^{[j]} = R_i^{[j]}[S_i^{[j]}]^{-1}$,则有

$$(A_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + B_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})^{\mathrm{T}} P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(A_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + B_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}) + \lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + (C_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + D_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})^{\mathrm{T}} (C_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + D_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}) < 0$$

对上式左右两边分别同时左乘 $[x^{\mathrm{T}}(t)]$,右乘 $[x(t)]$,可以得到:

$$x^{\mathrm{T}}(t)[(A_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + B_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})^{\mathrm{T}} P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(A_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + B_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})] + \lambda_i x^{\mathrm{T}}(t) P_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\,(C_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + D_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})^{T} (C_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} + D_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} K_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}) x(t) < 0$$

上式成立意味着 $\dot{V}_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t) \leqslant -\lambda_i V_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t) - z^{\mathrm{T}}(t) z(t)$。对不等式两边同时关于 t 积分,可知

$$V_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t) \leqslant V_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_v) \times \exp\{-\lambda_i \times (t - \tau_v)\} + \int_{\tau_v}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\} \Gamma(\tau) d\tau$$

其中,$\Gamma(\tau) = -z^{\mathrm{T}}(\tau) z(\tau)$,假定系统干扰为 0,不失一般性,令:

$\Gamma(\tau) = 0, \forall \tau \in [t_k, t_{k+1}), k = 0,1,2,\cdots,$

假设 $[t_k, t_{k+1}) = [t_k, \tau_1) \cup [\tau_1, \tau_2) \cup \cdots \cup [\tau_l, t_{k+1})$,考虑到式(3),进行相似的处理,得到:

$$P_i^{[j]} - \mu_i^{[j]} P_r^{[j]} < 0$$

将其代入到矩阵不等式(3)中,得到:

$$V_{\sigma_{\tau_v}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_v) \leqslant \mu_{\sigma_{\tau_{v-1}}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} V_{\sigma_{\tau_{v-1}}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_{v-1}),\ v = 1,2,\cdots,l$$

则有:

$$\begin{aligned}
V_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t) &\leqslant V_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_l) \times \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times (t-\tau_l)\} + \int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau \leqslant \mu_{\sigma_{l-1}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times \\
&V_{\sigma_{l-1}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_{l-1}) \times \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times (t-\tau_l)\} + \\
&\int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau \leqslant \mu_{\sigma_{l-1}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times \\
&[V^{[\gamma_k]}\sigma_{l-1}^{\gamma_k}(\tau_{l-1}) \times \exp\{-\lambda_{\sigma^{\gamma_k}\,l-1}^{[\gamma_k]} \times (\tau_l - \tau_{l-1})\}] \times \\
&\exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau_l)\} + \\
&\int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau \leqslant \\
&\mu_{\sigma_{l-1}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times V_{\sigma_{l-1}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_{l-1}) \times \exp\begin{Bmatrix} -\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau_l) - \\ \lambda^{[\gamma_k]}\sigma_{l-1}^{\gamma_k}(\tau_l - \tau_{l-1}) \end{Bmatrix} + \\
&\int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau \\
&\vdots \\
&\leqslant V_{\sigma_0^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k) \times \prod_{v=0}^{l} \mu_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times \\
&\exp\left\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau_l) - \sum_{v=0}^{l-1} \lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(\tau_{v+1}-\tau_v)\right\} + \\
&\int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

因此,对于任意 $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$\begin{aligned}
V_{\sigma_{(t,\gamma_k)}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t) &\leqslant \prod_{\sigma_{b=1}^{\gamma}}^{\mathrm{N}} (\mu_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]})^{\mathrm{N}_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t)} \\
&\exp\left\{\sum_{\sigma_{v=1}^{\gamma_k}}^{N} \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} \times \\ T_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k, t) \end{pmatrix}\right\} \times V_{\sigma(t_k,\gamma_k)}^{[\gamma_k]}(t_k) + \\
&\int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp(\|-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau = \\
&\exp\left\{\sum_{\sigma_{v=1}^{\gamma_k}}^{N} \begin{pmatrix} N_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} - \\ (\lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]} T_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t)) \end{pmatrix}\right\} \\
&V_{\sigma(t_k,\gamma_k)}^{[\gamma_k]}(t_k) + \int_{\tau_l}^{t_{k+1}} \exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

利用上式,重复此过程;对于任意 $t>0$,

$$V_{\sigma_{(t,\gamma_k)}^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t)\leqslant\exp\left\{\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}\begin{pmatrix}N_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}\\-(\lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}T_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t))\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\sigma(t_k,\gamma_{k-1})}^{[\gamma_{k-1}]}(t_k)+\int_{\tau_l}^{t_{k+1}}\exp\{-\lambda_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t-\tau)\}\Gamma(\tau)d\tau$$

$$\leqslant\exp\left\{\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}\begin{pmatrix}N_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}-\\(\lambda_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}T_{\sigma_v^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t_k,t))\end{pmatrix}\right\}$$

$$\times\exp\left\{\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}\begin{pmatrix}N_{\sigma_v^{\gamma_{k-1}}}^{[\gamma_{k-1}]}(t_k,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_{k-1}}}^{[\gamma_{k-1}]}-\\(\lambda_{\sigma_v^{\gamma_{k-1}}}^{[\gamma_{k-1}]}T_{\sigma_v^{\gamma_{k-1}}}^{[\gamma_{k-1}]}(t_k,t_{k-1}))\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\sigma(t_k,\gamma_{k-1})}^{[\gamma_{k-1}]}(t_k)$$

$$\vdots$$

$$\leqslant\exp\left\{\sum_{r=0}^{k}\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}\begin{pmatrix}N_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}(t_r,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}-\\(\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}T_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}(t_r,t))\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\sigma(0,\gamma_0)}^{[\gamma_0]}(0)$$

根据引理 3,其中,

$T_i^{[j]}(0,t)\leqslant(\pi_i^{[j]}+\varepsilon)t$,$N_i^{[j]}(0,t)\leqslant(\pi_i^{[j]}|q_{ii}^{[j]}|+\varepsilon)t$

由定义 2 和上式不等式可知:对于任意给定的 $t>0$,

$$V_{\sigma_l^{\gamma_k}}^{[\gamma_k]}(t)\leqslant\exp\left\{\left(\sum_{i\in\mathbb{M}}\sum_{j\in\mathbb{M},j\neq i}(N_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[0]}(t_r,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}+\left(\frac{\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}{\tau^*}-\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}\right)T_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[0]}(0,t)\right)\right\}V_{\sigma(0,\gamma_0)}^{[\gamma_0]}(0)=$$

$$\exp\left\{\sum_{r=0}^{k}\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}N_{\sigma_v^{\gamma}}^{[0]}(t_r,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}\right\}\times\exp\left\{\sum_{r=0}^{k}\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}\left(\frac{\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}{\tau^*}-\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}\right)\right\}T_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[0]}(0,t)\,V_{\sigma(0,\gamma_0)}^{[\gamma_0]}(0)$$

对上式两边同时取二范数后再取对数,

$$\frac{1}{t}\log\|x(t)\|\leqslant\frac{1}{t}\left\{\log\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{\sigma_v^{\gamma_k}=1}^{N}N_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[0]}(t_r,t)\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}\right\}+\|x(0)\|\right\}+\left\{\frac{1}{2}\max_{r,v\in\mathbb{M},r\neq v}\left(\frac{\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}{\tau^*}-\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}\right)\right\}$$

其中:$\alpha_1=\inf_{i\in\mathbb{M}}\lambda_{\min}(P_i^j)$,$\alpha_2=\sup_{i\in\mathbb{M}}\lambda_{\max}(P_i^j)$,$\lambda_{\min}(P_i^j)$、$\lambda_{\max}(P_i^j)$ 分别为矩阵 P_i^j 的最小特征值和最大特征值。根据式 $\tau^*\geqslant\dfrac{\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}{\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}$ 知 $\dfrac{\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}{\tau^*}-\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}<0$,则有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|x(t)\|\leqslant\left\{\frac{1}{2}\max_{j,i\in\mathbb{M},j\neq i}\left(\frac{\ln\mu_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}}{\tau^*}-\lambda_{\sigma_v^{\gamma_r}}^{[\gamma_r]}\right)\right\}<0,$$

由不等式切换次数和平均驻留时间法,根据定义 3,即在平均驻留时间约束的切换律下,在切换系统的平衡点 x=0,是指数几乎处处稳定的,证毕。

3　数值算例

考虑连续双切换线性正系统(1)有以下参数,假设 $\bar{M}=\bar{N}=\{1,2\}$,选取系统矩阵如下:

$$\boldsymbol{A}_1^1=\begin{bmatrix}0.8&0.3\\0.4&0.5\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2^1=\begin{bmatrix}0.7&0.1\\0.5&0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_1^2=\begin{bmatrix}0.2&0.5\\0&0.3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2^2=\begin{bmatrix}0.2&0.5\\0.4&0.1\end{bmatrix};\boldsymbol{B}_1^1=\begin{bmatrix}0.1&0.8\\0.2&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2^1=\begin{bmatrix}0.5&0.1\\0&0.3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1^2=\begin{bmatrix}1.0&0.8\\0.3&0.5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2^2=\begin{bmatrix}0.1&0.8\\0.2&0\end{bmatrix};\boldsymbol{C}_1^1=\begin{bmatrix}0.9&0.4\\1.0&0.8\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_2^1=\begin{bmatrix}0.9&1.0\\1.0&1.0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}_1^2=\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.2&1.0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}_2^2=\begin{bmatrix}0.9&1.5\\1.0&1.1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{D}_1^1=\begin{bmatrix}1.7&0.8\\0.3&0.7\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_2^1=\begin{bmatrix}0.9&0.4\\1.0&0.8\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_1^2=\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.2&1.0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_2^2=\begin{bmatrix}0.5&0.1\\0.4&0.3\end{bmatrix};$$

切换信号 $\sigma(t,1)$ 和 $\sigma(t,2)$ 转移概率矩阵分别为:

$$\boldsymbol{Q}^{[1]}=\begin{bmatrix}-1&1\\3&-3\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}^{[2]}=\begin{bmatrix}-2&2\\1&-1\end{bmatrix};$$

由公式 $\Pi^{[j]}=\Pi^{[j]}Q^{[j]}$,可以计算出平稳分布为:

$$\Pi^{[1]}=\begin{bmatrix}\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix},\ \Pi^{[2]}=\begin{bmatrix}\frac{5}{9}&\frac{4}{9}\end{bmatrix};$$

选取 $\lambda_1^{[1]}=0.3$,$\lambda_2^{[1]}=1.4$,$\lambda_1^{[2]}=0.2$,$\lambda_2^{[2]}=0.8$;$\mu_1^{[1]}=1.6$,$\mu_2^{[1]}=2$,$\mu_1^{[2]}=1.2$,$\mu_2^{[2]}=2.2$;根据不等式(4)计算得:

$$\tau^*\approx0.563\ 2$$

切换信号在平均驻留时间满足 $\tau^*>0.563\ 2$ 的约束条件下,根据定理 1,通过 MATLAB 提供的 LMI 工具箱,能够找到满足矩阵不等式的多个矩阵 $\boldsymbol{P}_i^r(i\in\bar{N},r\in\bar{M})$ 和控制增益 $K_i^r(i\in\bar{N},r\in\bar{M})$,得到如下结果:

$$\boldsymbol{P}_1^1=\begin{bmatrix}-1.151\ 9&-0.041\ 2\\-0.041\ 2&-1.559\ 8\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2^1=\begin{bmatrix}-3.065\ 0&0.108\ 3\\0.108\ 3&-2.992\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^2=\begin{bmatrix}-3.1827 & -0.0300\\ -0.0300 & -4.0987\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2^2=\begin{bmatrix}-3.4149 & 0.1025\\ 0.1025 & -4.2087\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{K}_1^1=\begin{bmatrix}-0.7284 & -1.0047\\ -0.6441 & -1.7084\end{bmatrix},\boldsymbol{K}_2^1=\begin{bmatrix}-0.2528 & -0.3731\\ -0.7904 & -0.3102\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_1^2=\begin{bmatrix}-0.7015 & 0.2568\\ -1.2693 & 0.4516\end{bmatrix},\boldsymbol{K}_2^2=\begin{bmatrix}0.8624 & 0.2961\\ 1.1233 & 0.6109\end{bmatrix};$$

根据定理1可知,系统在所设计的切换律下及反馈控制器下是指数几乎处处稳定的,系统的切换信号图、控制信号曲线和系统状态轨迹如图1~3所示。

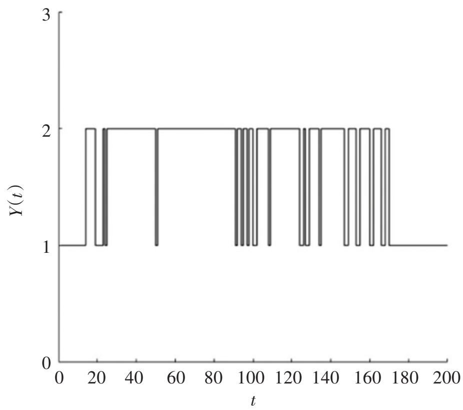

图1 切换信号 $\gamma(t)$

Fig. 1 Switching signal $\gamma(t)$

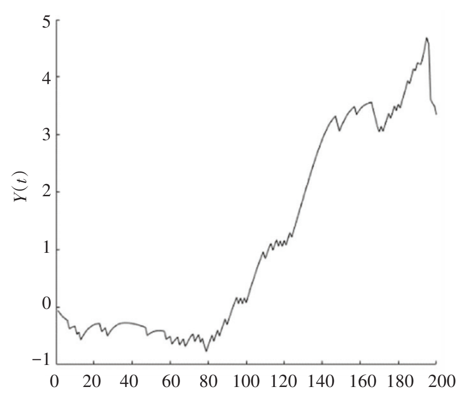

图2 控制曲线 $u(t)$

Fig. 2 Control curve

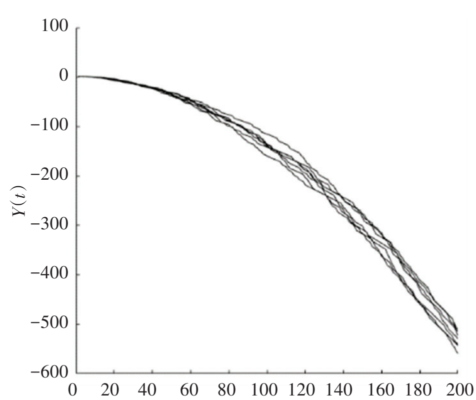

图3 $\ln\|x(t)\|$ 的7次实现

Fig. 3 Seven realizations of $\ln\|x(t)\|$

4 结束语

针对连续双切换线性正系统,研究了基于平均驻留时间切换的状态反馈问题,设计了系统的状态反馈控制器,构造了 Lyapunov 函数,根据马尔科夫过程及能量衰减原理适当的切换信号;利用线性矩阵不等式以及马尔科夫暂态分析方法,得出使得系统指数几乎处处稳定的充分条件;最后给出一个数值例子,验证了提出方法的有效性,为连续双切换线性正系统的分析提供了一种有效的方法。

参考文献

[1] MINERO P, COVIELLO L, FRANCESCHETTI M. Stabilization over Markov feedback channels: the general case[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(2): 349-362.

[2] HERNANDEZ-VARGAS E, COLANERI P, MIDDLETON R, et al. Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2011, 21(10): 1093-1111.

[3] YANG S, JIE Y, MIN Z, et al. Robust Exponential Almost Sure Stability of Discrete-time Two-level Switched Systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2016,42(1):131-139.

[4] SONG Y, YANG J, YANG T, et al. Almost Sure Stability of Switching Markov Jump Linear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9):2638-2643.

[5] BOLZEM P, COLANERI P, DE NICOLAO G. Design of stabilizing strategies for discrete-time dual switching linear systems[J]. Automatica, 2016, 69:93-100.

[6] 秦燕飞,包俊东,梁胡义乐. 不确定变时滞 Lurie 切换系统的 H_∞记忆输出反馈控制[J]. 数学的实践与认识,2019,49(23):122-130.

[7] 何伟,谢巍,吴伟林,等. 基于平均驻留时间切换离散线性系统的降阶输出反馈控制[J]. 控制理论与应用,2020,37(3):528-533.

[8] FARINA L, RINALDI S. Positive Linear Systems: Theory and Applications[M]. John Wiley & Sons, 2000:7-15.

[9] YANG T, FEI M, SONG Y, et al.Almost sure stability of discrete-time Markov jump linear systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(11): 901-906.

[10] Boukas E K. Stochastic switching systems: Analysis and design[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 2007,52:764.

[11] ZHAI S, YANG X S. Stability analysis of feedback switched systems with state and switching delays[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2013, 30(1): 21-35.

[12] ZHANG L, LONG F. Stability Analysis for Dual Switching Linear Continuous-Time Systems[C]//2019 Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2019: 1177-1183.